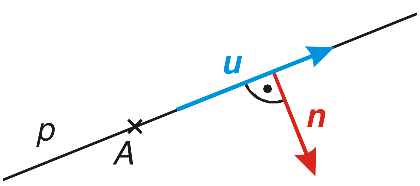
7.3.7 Přímková smršť

Předpoklady: 070306

Pedagogická poznámka: Hodina vznikla jako reakce na první průchod učebnicí v Třeboni se třídou 4.2011. Ukázalo se, že žáci mají problémy s přiřazením správného vektoru k různým druhům rovnic (parametrické vyjádření, obecná rovnice) v případech, kdy mají sestavovat rovnice více než jedné přímky, nebo když situace neodpovídá standardnímu postupu použitému při odvozování těchto rovnic.
Celá situace krásně ilustruje způsob, jakým žáci znásilňují matematiku. I když jsem se celou analytickou geometrii snažil vysvětlovat, že pro parametrické vyjádření potřebujeme směrový vektor a teprve na konkrétní situaci záleží, jak ho získáme, mnozí žáci navzdory mé snaze vyvinuli automatický postup, máme dva body, uděláme z nich vektor a ten dosadíme do parametrického vyjádření.
Podobně si vytvoří tupou automatiku na obecnou rovnici. Myslím, že nejde o žádný snadno odstranitelný nedostatek, ve 4.2012 jsem se snažil tomuto efektu zabránit, přesto dvě třetiny třídy měly v začátku problémy a u několika žáků jsme museli stereotyp v průběhu hodiny (nebo i po ní) opravdu „lámat“.
Problém je zcela principiální. Místo logického postupu, který je možné použít různě podle konkrétních situací a který vychází z toho, že nejdříve si rozmyslím, jaký vektor potřebuji najít a pak se ho teprve snažím získat (postupu, který vyžaduje zamyšlení a interpretaci situace), se v žácích vytvoří podmíněny reflex spouštěný slovem parametrická (obecná), který pro dvojici zadaných bodů automaticky bez jakéhokoliv přizpůsobení situaci vyplivne rovnici.
Uvedený problém se vyskytuje masově. Ve 4.2011 se týkal velké většiny třídy, při cvičení jsem zjistil, že v jiných třídách se projevuje i u jedničkářů.
Obávám se, že není řešením podobné příklady zadávat ihned při odvozování rovnic, protože takový postup vyvolává v žácích spíše pocit naprosté bezmoci z nezvladatelného chaosu.
Při veškeré komunikaci se studenty je třeba pamatovat, že se učí orientaci v řešení příkladu (a ne sestavování rovnic) a hlavně překonávat pseudopravidla, proto je třeba neřešit problém za ně, jen jim s ním pomáhat.

Co jsme se zatím naučili z analytické geometrie?
Přímku P můžeme vyjádřit dvěma způsoby (pomocí jednoho ze dvou charakteristických vektorů).



Parametricky pomocí směrového vektoru $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$:

$x = a_1 + t \cdot u_1$,
$y = a_2 + t \cdot u_2; t \in R$.

Pokud omezíme hodnoty parametru, můžeme vyjádřit i části přímky (například úsečku).

Obecně pomocí normálového vektoru $\boldsymbol{n} = (a; b)$:

$ax + by + c = 0$.

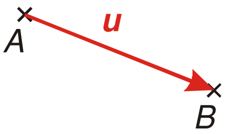
Bod leží na přímce, když vyhovuje její rovnici (je jedno zda parametrické nebo obecné).
Průsečík dvou přímek vyhovuje oběma rovnicím (je jedno zda parametrickým, obecným nebo jejich kombinaci).

Vzájemnou polohu dvou přímek zjistíme z počtu průsečíků nebo ze vzájemné polohy jejich charakteristických vektorů.

Nic dalšího jsme se zatím neučili, všechno ostatní je triviální důsledek předchozího a nemá smysl si to pamatovat.

Pedagogická poznámka: Pokud má někdo pocit, že se toho naučil podstatně více, jde o znamení toho, že nezpracovává informace tak, jak má.

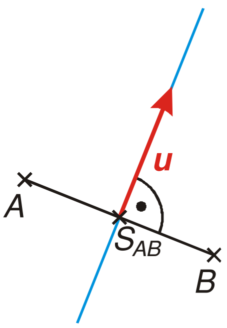
Př. 1: Jsou dány body $A[1;3]$, $B[-3;5]$. Najdi parametrické vyjádření přímky *AB*. Najdi parametrické vyjádření osy úsečky *AB*.



Vyjádření přímky *AB*

- směrový vektor je vektor $B-A=(-4;2) \Rightarrow \boldsymbol{u}=(2;-1)$
- vycházíme z bodu $A[1;3]$,

parametrické vyjádření přímky *AB*: $\begin{array}{l} x=1+2t \\ y=3-t, t\in R \end{array}$.

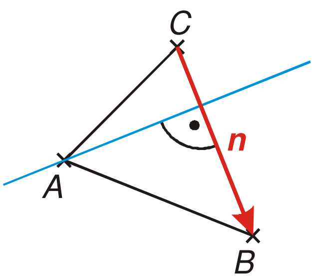


Osa úsečky *AB* – přímka kolmá na úsečku *AB*, procházející jejím středem.
Parametrické vyjádření:

- směrový vektor kolmý na úsečku *AB*: $B-A=(-4;2) \Rightarrow \boldsymbol{u}_{osy}=(1;2)$,
- střed úsečky *AB*: $S_{AB}[-1;4]$,

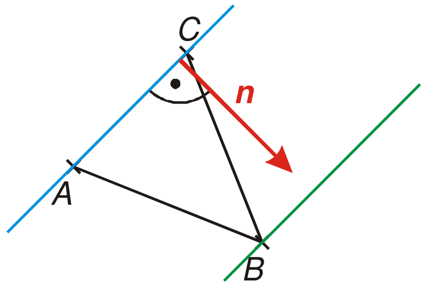
parametrické vyjádření osy úsečky *AB*: $\begin{array}{l} x=-1+t \\ y=4+2t, t\in R \end{array}$.

Př. 2: Je dán trojúhelník *ABC*, $A[1;3]$, $B[-3;5]$, $C[3;0]$. Najdi obecnou rovnici přímky, na které leží výška v_a.



Přímka, na které leží výška v_a: přímka kolmá na stranu *BC* procházející bodem *A*.
Normálový vektor výšky = vektor kolmý na výšku $\Rightarrow$ vektor rovnoběžný se stranou *BC*,
$C-B=(6;-5)=\boldsymbol{n}_v \Rightarrow$ rovnice $6x-5y+c=0$.
Dosadíme bod $A[1;3]$: $6\cdot 1-5\cdot 3+c=0 \Rightarrow c=9$.
Rovnice přímky, na které leží výška v_a: $6x-5y+9=0$.

Př. 3: Je dán trojúhelník ABC, $A[1;3]$, $B[-3;5]$, $C[3;0]$. Najdi obecnou rovnici přímky AC. Najdi obecnou rovnici přímky, která prochází bodem B a je s přímkou AC rovnoběžná.



Přímka AC:

$C - A = (2;-3) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{AC} = (3;2)$,

$\Rightarrow$ rovnice $3x + 2y + c = 0$.

Dosadíme bod $A[1;3]$: $3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow c = -9$.

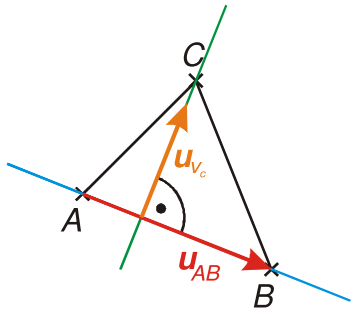
Rovnice přímky AC: $3x + 2y - 9 = 0$.

Rovnoběžka s přímkou AC bodem B: stejný normálový vektor $\boldsymbol{n}_{AC} = (3;2) \Rightarrow$ rovnice $3x + 2y + c = 0$.

Dosadíme bod $B[-3;5]$: $3 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 + c = 0 \Rightarrow c = -1$.

Rovnice přímky rovnoběžné s AC procházející bodem B: $3x + 2y - 1 = 0$.

Př. 4: Je dán trojúhelník ABC, $A[1;3]$, $B[-3;5]$, $C[2;0]$. Najdi parametrická vyjádření přímky AB a přímky, na které leží výška v_c. Urči souřadnice paty výšky v_c.



Přímka AB: $B - A = (-4;2) \Rightarrow \boldsymbol{u}_{AB} = (-2;1)$,

použijeme bod $A[1;3] \Rightarrow AB$: $\begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t; t \in R \end{array}$.

Přímka, na které leží v_c, je kolmá na AB: $\Rightarrow \boldsymbol{u}_{v_c} = (1;2)$,

použijeme bod $C[2;0] \Rightarrow v_c$: $\begin{array}{l} x = 2 + s \\ y = 2s; s \in R \end{array}$.

Pata výšky je průsečíkem obou přímek $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic.

$1 - 2t = 2 + s$

$3 + t = 2s \quad \Rightarrow t = 2s - 3$

Dosadíme do první rovnice: $1 - 2(2s - 3) = 2 + s$.

$1 - 4s + 6 = 2 + s$

$5 = 5s \Rightarrow s = 1$

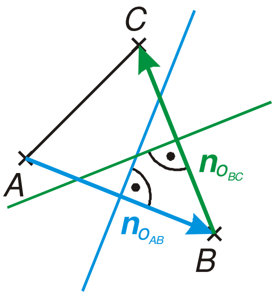
Dosazením do rovnice přímky na které leží v_c, určíme souřadnice bodu C_0.

$x = 2 + s = 2 + 1 = 3$

$y = 2s = 2 \cdot 1 = 2$

Pata výšky má souřadnice $C_0[3;2]$.

Př. 5: Je dán trojúhelník ABC, $A[1;3]$, $B[-3;5]$, $C[3;1]$. Najdi obecné rovnice os dvou stran a jejich průsečík (střed kružnice opsané).



Osa strany: prochází středem strany a je na stranu kolmá.

Osa strany AB: $B-A=(-4;2) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{osa\,AB}=(-2;1)$,

rovnice $-2x+y+c=0$.

Dosadíme bod $S_{AB}[-1;4]$: $-2\cdot(-1)+4+c=0 \Rightarrow c=-6$.

Osa strany AB: $-2x+y-6=0$.

Osa strany BC: $C-B=(6;-4) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{osa\,BC}=(3;-2)$,

rovnice $3x-2y+c=0$.

Dosadíme bod $S_{BC}[0;3]$: $3\cdot 0-2\cdot 3+c=0 \Rightarrow c=6$.

Osa strany BC: $3x-2y+6=0$.

Hledáme průsečík $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic: $\begin{matrix}-2x+y-6=0 & /\cdot 2\\ 3x-2y+6=0 & \end{matrix}$.

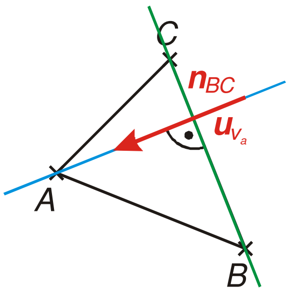
$$\begin{array}{r}-4x+2y-12=0\\ 3x-2y+6=0\\ \hline -x-6=0 \Rightarrow x=-6\end{array}$$

(sečteme rovnice)

y-ovou souřadnici spočteme dosazením do rovnice jedné z os: $-2(-6)+y-6=0 \Rightarrow y=-6$.

Střed kružnice opsané trojúhelníku ABC leží v bodě $S[-6;-6]$.

Př. 6: Je dán trojúhelník ABC, $A[1;3]$, $B[-3;5]$, $C[0;-4]$. Najdi obecnou rovnici přímky BC a parametrické vyjádření přímky, na které leží výška v_a. Najdi průsečík obou přímek (patu výšky v_a).



Přímka BC: $C-B=(3;-9) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{BC}=(3;1)$,

rovnice $3x+y+c=0$.

Dosadíme bod $C[0;-4]$: $3\cdot 0+(-4)+c=0 \Rightarrow c=4$.

Přímka BC: $3x+y+4=0$.

Přímka na které leží v_a: je kolmá na přímku BC $\Rightarrow$ její směrový vektor je rovnoběžný s normálovým vektorem přímky BC.

$\boldsymbol{u}_{v_a}=\boldsymbol{n}_{BC}=(3;1)$, prochází bodem $A[1;3]$,

přímka, na které leží v_a: $\begin{matrix}x=1+3t\\ y=3+t, t\in R\end{matrix}$.

Hledáme průsečík $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic: $\begin{matrix}3x+y+4=0\\ x=1+3t\\ y=3+t\end{matrix}$.

Z druhé a třetí rovnice dosadíme do první: $3(1+3t)+(3+t)+4=0$.

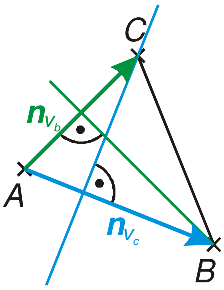
$3+9t+3+t+4=0$

$10t=-10 \Rightarrow t=-1$

Dopočteme souřadnice průsečíku: $\begin{aligned} x &= 1+3t = 1+3\cdot(-1) = -2 \\ y &= 3+t = 3+(-1) = 2 \end{aligned}$.

Pata výšky v_a se nachází v bodě $A_0[-2;2]$.

Př. 7: Je dán trojúhelník ABC, $A[3;1]$, $B[-6;4]$, $C[-2;-4]$. Najdi obecné rovnice přímek, na kterých leží výšky v_b a v_c. Urči jejich průsečík (ortocentrum trojúhelníku). Ověř, že tímto bodem prochází i přímka, na které leží výška v_a.



Přímka, na které leží výška v_c.

Přímka je kolmá na stranu AB: $B-A=(-9;3) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{v_c}=(-3;1)$,

rovnice $-3x+y+c=0$.

Dosadíme bod $C[-2;-4]$: $-3\cdot(-2)+(-4)+c=0 \Rightarrow c=-2$.

Přímka, na které leží výška v_c: $-3x+y-2=0$.

Přímka, na které leží výška v_b.

Přímka je kolmá na stranu AC: $C-A=(-5;-5) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{v_b}=(1;1)$,

rovnice $x+y+c=0$.

Dosadíme bod $B[-6;4]$: $(-6)+4+c=0 \Rightarrow c=2$.

Přímka, na které leží výška v_b: $x+y+2=0$.

Hledáme průsečík $\Rightarrow$ řešíme soustavu rovnic: $\begin{aligned} -3x+y-2&=0 \\ x+y+2&=0 \end{aligned}$ rovnice odečteme.

$-4x-4=0 \Rightarrow x=-1$

y-ovou souřadnici spočteme dosazením do rovnice jedné z výšek: $-1+y+2=0 \Rightarrow y=-1$.

Ortocentrum trojúhelníku ABC leží v bodě $O[-1;-1]$.

Přímka, na které leží výška v_a.

Přímka je kolmá na stranu BC: $C-B=(4;-8) \Rightarrow \boldsymbol{n}_{v_a}=(1;-2)$,

rovnice $x-2y+c=0$.

Dosadíme bod $A[3;1]$: $1\cdot 3-2\cdot 1+c=0 \Rightarrow c=-1$.

Přímka, na které leží výška v_a: $x-2y-1=0$.

Dosadíme bod $O[-1;-1]$: $x-2y-1=(-1)-2(-1)-1=0 \Rightarrow$ přímka prochází bodem O.

Př. 8: Je dán trojúhelník ABC, $A[1;3]$, $B[-3;5]$, $C[3;1]$. Najdi obecnou rovnici střední příčky $S_{AC}S_{BC}$. Ověř, že je rovnoběžná se stranou AB.

Obecná rovnice přímky $S_{AC}S_{BC}$: $S_{BC}-S_{AC}=[0;3]-[2;2]=(-2;1) \Rightarrow \boldsymbol{n}=(1;2)$,

rovnice: $x+2y+c=0$.

Dosadíme bod $S_{BC}[0;3]$: $0+2\cdot 3+c=0 \Rightarrow c=-6$.

Rovnice střední příčky $S_{AC}S_{BC}$: $x+2y-6=0$.

Směrový vektor přímky $(-2;1)$ je násobek vektoru $B-A=(-4;2)$ $\Rightarrow$ střední příčka je rovnoběžná se stranou AB.

Shrnutí: Při sestavování rovnice přímky musíme reagovat na konkrétní situaci a ne opakovat stále stejný postup.